

Trente et unième Olympiade Mathématique Belge

organisée par la

*Société Belge des Professeurs de Mathématique
d'expression française*

Mini demi-finale 2006

INSTRUCTIONS

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Vingt-deux questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.
 EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Huit questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans $[0;999]$. C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION : Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

Mercredi 8 mars 2006

À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)

Nom : _____

Prénom : _____

Classe : _____

Adresse privée
Rue et n° : _____

Code postal et localité : _____

École
Nom (sans abréviations) : _____

Adresse
Rue et n° : _____

Code postal et localité : _____

CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes : × 5 =

+

Abstentions : × 2 =

Score total :

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

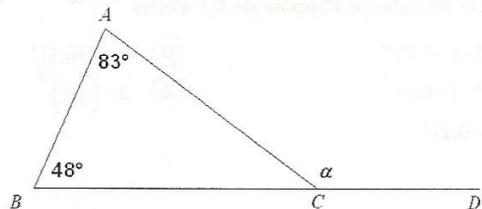
29

30

1. $2^4 - 4^2 =$

- (A) -4 (B) 0 (C) 2 (D) 4 (E) Une autre réponse.

2. Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle extérieur $\widehat{ACD} = \alpha$?



- (A) 119 (B) 123 (C) 127 (D) 131 (E) 141

3. Jean a travaillé le sixième d'une journée de 24 heures, puis les trois huitièmes de cette journée. Combien d'heures a-t-il travaillé en tout ?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 13 (E) 15

4. $2006^2 =$

- (A) 42436 (D) 4016016
 (B) 400012 (E) 4024036
 (C) 4000036

5. $(0,4)^3 - (0,3)^4 =$

- (A) -0,1 (B) 0 (C) 0,1 (D) 0,0559 (E) 0,17

6. Quelle est la négation de la phrase "En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme." ?

- (A) "En Belgique, chaque jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme."
 (B) "En Belgique, au moins un jour de l'année, personne ne meurt des conséquences du tabagisme."
 (C) "En Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un ne meurt pas des conséquences du tabagisme."
 (D) "Hors de Belgique, chaque jour de l'année, quelqu'un meurt des conséquences du tabagisme."
 (E) Aucune des propositions précédentes.

7. Combien de diviseurs naturels le nombre 144 admet-il ?

- (A) 5 (B) 8 (C) 9 (D) 14 (E) 15

8. Le double du cube de l'opposé de 0,1 s'écrit

- (A) $(2 \cdot (-0,1))^3$ (D) $2 \cdot (-0,1)^3$
 (B) $2^3 \cdot (-0,1)$ (E) $2 \cdot \left(\frac{1}{0,1}\right)^3$
 (C) $(-0,2)^3$

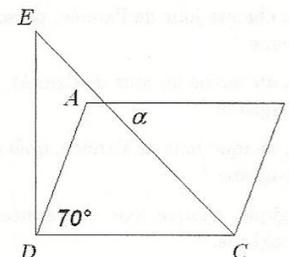
9. Un malade pèse 90 kg. Pour se soigner, il doit absorber chaque jour une dose de tonique cardiaque correspondant à 10 mg par kilogramme de masse corporelle. Ce tonique est distribué sous la forme d'une potion, mélange d'eau et de médicament, contenant 300 mg de médicament par 10 ml de potion. Combien de millilitres de potion le malade doit-il absorber quotidiennement ?

- (A) 27 (B) 30 (C) 100 (D) 270 (E) 300

10. Quel est le plus grand nombre naturel de deux chiffres égal à la somme de 4 fois son chiffre des dizaines et 5 fois son chiffre des unités ?

- (A) 23 (B) 39 (C) 46 (D) 69 (E) 88

11. Sans réponse préformulée — Dans le parallélogramme ABCD, l'amplitude de l'angle \widehat{ADC} vaut 70° . Quelle est, en degrés, l'amplitude de l'angle α sachant que le triangle CDE est rectangle isocèle ?



12. Lorsqu'il doit soustraire deux fractions, un mauvais élève soustrait les numérateurs et soustrait aussi les dénominateurs ; par exemple, pour lui, $\frac{5}{4} - \frac{9}{12} = \frac{5-9}{4-12} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$ et, par hasard, il obtient ainsi la réponse correcte. Dans un des cas suivants, son procédé détestable ne lui fournira pas la bonne réponse. Lequel ?

- (A) $\frac{6}{7} - \frac{8}{14}$ (D) $\frac{5}{6} - \frac{9}{18}$
 (B) $\frac{7}{3} - \frac{16}{12}$ (E) $\frac{7}{11} - \frac{3}{22}$
 (C) $\frac{3}{5} - \frac{4}{10}$

13. Parmi les cinq nombres suivants, un seul est premier. Lequel ?

- (A) 12 799 (B) 13 791 (C) 14 645 (D) 16 803 (E) 73 797

14. *Sans réponse préformulée* — Dans un cube, un sommet, une arête contenant ce sommet et une face contenant cette arête, forment un drapeau. Combien un cube comporte-t-il de drapeaux ?

15. Combien de nombres naturels non nuls ont, après leur division par 16, un reste égal au quotient ?

- (A) 15 (B) 16 (C) 25 (D) 117 (E) 118

16. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{5}{5} + \dots + \frac{97}{5} + \frac{99}{5} =$

- (A) 499 (B) $\frac{999}{2}$ (C) $\frac{2499}{5}$ (D) 500 (E) 990

17. *Sans réponse préformulée* — Un sac contient 4 boules blanches, 5 boules noires et 3 boules rouges. Quel est le pourcentage de boules qui ne sont pas rouges ?

18. Dans un polygone régulier à 2006 côtés, on construit les segments consécutifs joignant un sommet au 17^e sommet suivant (en progressant toujours dans le même sens). Combien de segments aura-t-on tracés quand on sera revenu au point de départ ?

- (A) 59 (B) 118 (C) 2005 (D) 2006 (E) 4012

19. Un cercle est tangent à deux demi-droites issues d'un même point et faisant entre elles un angle de 120°. Le segment reliant les deux points de contact

- (A) comprend toujours le centre du cercle ;
 (B) a la même longueur que le diamètre du cercle ;
 (C) a la même longueur que le rayon du cercle ;
 (D) a la même longueur que le quart de la circonférence ;
 (E) a la même longueur que le sixième de la circonférence.

20. Combien existe-t-il de nombres naturels n tels que la fraction $\frac{n}{n+2}$ est simplifiable ?

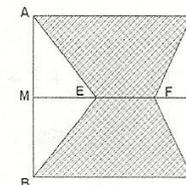
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 2006 (E) Une infinité.

21. Un carré et un cercle ont le même périmètre. Le rapport $\frac{r}{c}$ du rayon r du cercle au côté c du carré vaut

- (A) $\frac{1}{\pi}$ (B) $\frac{2}{\pi}$ (C) 1 (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) π

22. *Sans réponse préformulée* — Le nombre 98 est la somme de trois nombres. Le plus petit de ces nombres vaut la moitié du deuxième nombre et le quart du troisième. Que vaut le plus grand de ces trois nombres ?

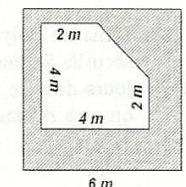
23. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 120. Les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ sont M et N . Sur la médiane MN , on place deux points E et F . L'aire du polygone $AEBCFD$ ombré vaut les trois cinquièmes de l'aire du carré. Quelle est la longueur de EF ?



- (A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 72 (E) 84

24. *Sans réponse préformulée* — Dans l'égalité $\frac{5}{13} = \frac{3}{8} + \frac{2}{m}$, que vaut m ?

25. Dans un jardin, la piscine de forme pentagonale est entourée d'une terrasse (ombrée sur la figure). Que vaut, en mètres carrés, l'aire de la terrasse ?



- (A) 18 (B) 20,75 (C) 22 (D) 22,5
 (E) Les données sont insuffisantes pour le dire.

26. *Sans réponse préformulée* — Jean fait plusieurs sachets de bonbons à partir d'un gros paquet de 100 bonbons. Il met dans chaque sachet le même nombre de bonbons et il lui reste alors dans le paquet quelques bonbons en nombre inférieur au nombre de sachets. Pour vider le sachet, il ajoute alors un bonbon supplémentaire dans certains sachets. Sachant que quinze sachets n'ont pas reçu de bonbon supplémentaire, combien Jean a-t-il fait de sachets ?

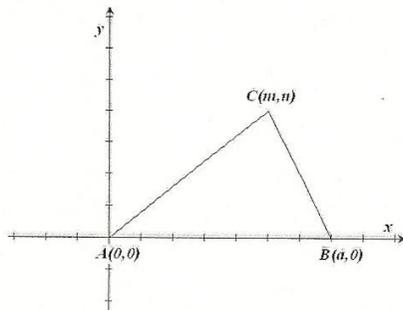
27. *Sans réponse préformulée* — Dix couples se rencontrent lors d'une soirée et se saluent en se serrant la main. Chaque personne serre une seule fois la main de chaque autre personne, mais évidemment aucun mari ne serre la main de sa femme et aucune femme celle de son mari. Combien de poignées de mains sont ainsi échangées ?

28. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre naturel non nul par lequel il faut multiplier la fraction

$$\frac{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

pour obtenir un nombre entier ?

29. Dans le plan muni d'un repère dont les axes x et y sont perpendiculaires, on considère le triangle dont les sommets sont les points A de coordonnées $(0, 0)$, B de coordonnées $(a, 0)$ et C de coordonnées (m, n) , où a, m, n sont des nombres entiers.

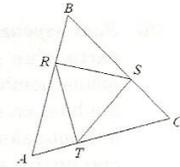


Laquelle des propositions ci-dessous est nécessairement vraie, sachant que l'aire du triangle ABC est un nombre entier ?

- (A) m est pair ;
- (B) n est pair ;
- (C) a est pair ;
- (D) m et n sont pairs ;
- (E) a est pair ou n est pair.

30. Les points R, S et T appartiennent aux côtés du triangle équilatéral ABC , et sont tels que $|AR| = 2|RB|$, $|BS| = 2|SC|$ et $|CT| = 2|TA|$. Que vaut le rapport de l'aire du triangle RST à l'aire du triangle ABC ?

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{1}{3}$
- (C) $\frac{5}{18}$
- (D) $\frac{3}{10}$
- (E) $\frac{4}{9}$



Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.