

**Quarante et unième Olympiade Mathématique Belge**  
*Organisée par la Société Belge des Professeurs de Mathématique*

**Mini demi-finale 2016**

**INSTRUCTIONS**

- N'ouvrez pas ce livret avant le signal de votre professeur.
- Vous indiquerez vos réponses au verso de cette page.
- Ce questionnaire contient 30 questions ; répondez à 5 questions au moins.
- Quinze questions sont à choix multiple. Chacune est suivie de réponses désignées par **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)** et **(E)**. Chaque question possède une seule réponse correcte. Décidez quelle est la réponse correcte parmi les cinq proposées et retenez la lettre majuscule correspondante. Sur la feuille réponse, écrivez cette lettre dans le cercle situé à droite du numéro de la question.  
 EXEMPLE : si vous estimez que la réponse correcte à la question numéro 17 est celle précédée de la lettre **(D)**, vous écrirez D sur la feuille réponse, à droite du numéro 17, dans le cercle.
- Quinze questions sont sans réponses préformulées. Dans ce cas, la réponse correcte est un nombre entier dans  $[0; 999]$ . C'est ce nombre que vous écrirez dans la case rectangulaire de la feuille réponse.
- RÈGLES DE COTATION :** Vous recevez 5 points par réponse correcte, 2 points par abstention et 0 point par réponse fausse. Avec ce système, deviner fera en moyenne diminuer votre score. Vous n'avez intérêt à deviner que si vous avez au moins une chance sur deux de bien choisir.
- Reportez les réponses au fur et à mesure que vous les obtenez. Écrivez au crayon (si vous changez d'avis, gomez la réponse). Du papier de brouillon, du papier millimétré, une règle, un compas, une gomme peuvent être utilisés. Les calculatrices et règles à calcul ne sont pas autorisées, de même que les livres et les notes personnelles.
- Au signal de votre professeur, détachez la feuille de couverture sans déchirer le questionnaire, retournez-la, couvrez-en les questions, puis inscrivez les informations demandées.
- Quand votre professeur vous l'indiquera, commencez le travail sur les problèmes. Vous disposez de 90 minutes.

**À REMPLIR PAR L'ÉLÈVE (en majuscules)**

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Classe : \_\_\_\_\_

---

Adresse privée  
 Rue et n° : \_\_\_\_\_

Code postal et localité : \_\_\_\_\_

---

École  
 Nom (sans abréviations) : \_\_\_\_\_

Adresse  
 Rue et n° : \_\_\_\_\_

Code postal et localité : \_\_\_\_\_

**CADRE RÉSERVÉ AU PROFESSEUR**

Chaque réponse correcte a une valeur de 5 points et chaque abstention a une valeur de 2 points ; rien n'est déduit pour une réponse fausse. Le score total est calculé en prenant 5 fois le nombre de réponses correctes et en ajoutant 2 fois le nombre d'abstentions.

Réponses correctes :  × 5 =

+

Abstentions :  × 2 =

---

Score total :

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

28

29

30

1. J'écris 1 sur chaque case blanche d'un échiquier  $8 \times 8$  et  $-1$  sur chaque case noire. Que vaut le produit des 64 nombres écrits ?

- (A)  $-1$     (B)  $0$     (C)  $1$     (D)  $2$     (E) Une autre valeur

2. Le prix d'un pantalon subit une augmentation de 15% suivie d'une baisse de 15%. Finalement, son prix

- (A) Est resté inchangé ;                      (D) A augmenté de 3% ;  
 (B) A augmenté de 2,25% ;                (E) A diminué de 3% ;  
 (C) A diminué de 2,25% ;

3. *Sans réponse préformulée* — Que vaut la somme de tous les multiples de 3 compris entre 17 et 76 ?

4. Le centre du cercle inscrit à un triangle

- (A) Est le point d'intersection de ses médianes ;  
 (B) Est le point d'intersection de ses hauteurs ;  
 (C) Est le point d'intersection de ses médiatrices ;  
 (D) Est le point d'intersection de ses bissectrices.  
 (E) Aucune des réponses précédentes

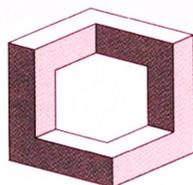
5. *Sans réponse préformulée* — Si  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + \dots + (n-1) + n)^2$ , que vaut  $n$  ?

6. La décomposition en facteurs premiers d'un nombre  $a$  est  $2^3 \times 3 \times 5$ . Parmi ces cinq nombres, lequel *n'est pas* diviseur de  $a$  ?

- (A) 30    (B) 20    (C) 15    (D) 12    (E) 9

7. *Sans réponse préformulée* — Un nombre *ascendant* est un nombre naturel dont les chiffres vont strictement croissant de gauche à droite : par exemple, 124 (car  $1 < 2 < 4$ ) ou 1259 (car  $1 < 2 < 5 < 9$ ). Combien y a-t-il de nombres ascendants à deux chiffres ?

8. *Sans réponse préformulée* — Le solide ci-contre est symétrique ; toutes ses faces sont en forme de L. Combien en a-t-il ?



9. Un tiers d'un vase est rempli d'eau. Une quantité d'eau égale aux deux tiers du volume libre restant est ajoutée. Au total, quelle part du volume du vase est alors remplie d'eau ?

- (A)  $\frac{2}{9}$     (B)  $\frac{1}{3}$     (C)  $\frac{2}{3}$     (D)  $\frac{7}{9}$     (E)  $1$

10. Au jeu « Ça passe ou ça casse », on double ses gains à chaque bonne réponse et on perd tout à la première erreur. À la première réponse, si elle est exacte, on gagne 100 €. Il est permis d'arrêter pour repartir avec ses gains après chaque question. À combien de questions a répondu correctement un joueur qui a gagné 3200 € ?

- (A) 5    (B) 6    (C) 7    (D) 16    (E) 32

11. Trois nombres premiers  $p$ ,  $q$  et  $r$  vérifient  $p + q = r$  et  $p < q$ . Que vaut  $p$  ?

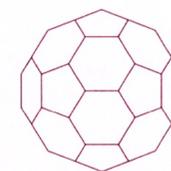
- (A) 2    (B) 3    (C) 5    (D) 7    (E) 11

12. Le point  $P$  appartient à la droite  $d$  ; l'image  $P'$  du point  $P$  par la symétrie orthogonale d'axe  $m$  appartient encore à  $d$

- (A) Si, et uniquement si,  $m$  passe par  $P$  ;  
 (B) Si, et uniquement si,  $m$  et  $d$  sont perpendiculaires ;  
 (C) Si, et uniquement si,  $m$  et  $d$  sont confondues ;  
 (D) Si, et uniquement si,  $m$  passe par  $P$  ou est perpendiculaire à  $d$  ;  
 (E) Si, et uniquement si,  $m$  et  $d$  sont perpendiculaires ou confondues.

13. *Sans réponse préformulée* — Quel est le chiffre des unités de  $2^{2016}$  ?

14. *Sans réponse préformulée* — Un icosaèdre tronqué est un polyèdre en forme de ballon de football qui possède 32 faces : 20 sont des hexagones réguliers et 12 des pentagones réguliers. Combien ce solide a-t-il de sommets ?



15. De combien de manières peut-on écrire 35 comme somme d'au moins deux naturels consécutifs ?

- (A) 0    (B) 1    (C) 2    (D) 3    (E) 4

16. *Sans réponse préformulée* — Un cube a un volume de  $0,125 \text{ m}^3$  ; quelle est, en mètres, la somme des longueurs de ses arêtes ?

17. *Sans réponse préformulée* — Un professeur a acheté des billets de train pour les 27 élèves de sa classe, au prix total de 360 €. Si 6 élèves viennent s'ajouter, quel sera, en euros, le nouveau prix total, sachant que chacun des 33 billets coûte le même prix unitaire ?

18. Que faut-il ajouter au double de  $n - 4$  pour obtenir le double de  $n + 1$  ?  
 (A) 10      (B)  $n - 10$       (C)  $n$       (D)  $n + 2$       (E)  $n + 4$
19. *Sans réponse préformulée* — On multiplie tous les nombres impairs entre 216 et 2016. Quel sera le chiffre des unités du nombre ainsi obtenu ?
20. Dans une kermesse, Zébulon va au stand de tir à la carabine. Il achète cinq plombs. À chaque fois qu'il touche la cible, il en reçoit deux autres. S'il a en tout tiré 47 fois, et qu'il n'a alors plus aucun plomb, combien de fois a-t-il touché la cible ?  
 (A) 21      (B) 26      (C) 42      (D) 47      (E) 52
21. *Sans réponse préformulée* — Quel est le plus petit nombre entier strictement positif  $k$  tel que  $k \cdot 198$  soit un carré parfait ?
22. Si, dans une population, le nombre de femmes augmente de 10 % et que le nombre d'hommes diminue de 10 %, comment varie la population ?  
 (A) Elle baisse de 10 %.  
 (B) Elle ne diminue ni ne croît.  
 (C) Elle augmente de 10 %.  
 (D) Elle augmente d'un autre pourcentage (bien déterminé).  
 (E) Elle varie d'une manière que les données de la question ne permettent pas de déterminer.
23. *Sans réponse préformulée* — Un hectolitre de froment pèse 75 kg ; 100 kg de froment donnent 80 kg de farine, 4 kg de farine se transforment en 5 kg de pain et le pain vendu rapporte 0,80 €/kg à la boulangerie. Combien d'euros rapporte le pain obtenu à partir d'un demi mètre cube de froment ?
24. *Sans réponse préformulée* — Si  $n = 125 \times 524 \times 8$ , que vaut  $n/2000$  ?
25. Albert a devant lui un certain nombre de tirelires et un certain nombre de pièces d'un euro. Il aurait 3 pièces de trop s'il en plaçait 5 par tirelire. Et il lui manque 5 pièces pour en placer 6 par tirelire. Combien a-t-il de pièces ?  
 (A) 8      (B) 27      (C) 43      (D) 54      (E) 55

26. *Sans réponse préformulée* — Albert, toujours lui, dispose des jetons en carrés de la manière suivante :



Il construit le premier carré, puis le deuxième à côté du premier, puis le troisième à côté des deux premiers, et ainsi de suite. S'il dispose de 200 jetons, combien de figures entières pourra-t-il ainsi créer ?

27. Dans le plan, quel est le plus grand nombre de points communs à deux hexagones réguliers convexes qui se coupent en un nombre fini de points ?  
 (A) 3      (B) 4      (C) 5      (D) 6      (E) 12
28. *Sans réponse préformulée* — Quel est le nombre minimal de personnes qu'il faut réunir pour être certain qu'au moins 4 d'entre elles soient nées le même mois ?
29. *Sans réponse préformulée* — Combien de naturels non nuls inférieurs à 100 sont diviseurs de 2016 ?
30. Les sommets (les petits disques) du graphe ci-contre sont coloriés de telle sorte que deux sommets reliés par un segment ne soient jamais de la même couleur. De combien de couleurs a-t-on besoin au minimum ?  
 (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5      (E) 6



Les participants sélectionnés pour la finale recevront par l'intermédiaire de leur école une fiche qu'ils devront compléter. Le jour de la finale, ils se muniront de cette fiche ainsi que de leur carte d'identité.