



## TRENTE-SEPTIÈME OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE MINI FINALE 2012

Mercredi 25 avril 2012

*Prière de répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.  
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée !*

1. Soit

- La somme à 1 terme  $1 \times 1$  ;
- La somme à 2 termes  $1 \times 2 + 2 \times 1$  ;
- La somme à 3 termes  $1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1$  ;
- La somme à 4 termes  $1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1$  ;
- La somme à 5 termes  $1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 1$  ;
- ...

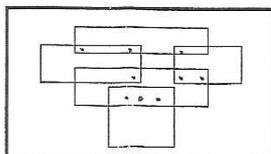
- (a) Écrire la somme à 9 termes.
- (b) La somme à 2012 termes est-elle un nombre pair ou un nombre impair ?
- (c) Pour quels naturels non nuls  $n$  la somme à  $n$  termes est-elle impaire ?

2. Soit  $A$  un point sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$ .

- (a) Soit encore  $B$  un point du cercle, tel que  $|AB| = |OA|$ . La perpendiculaire à  $OB$  par  $A$  recoupe le cercle en  $B'$ . Le quadrilatère  $OABB'$  est-il (i) un trapèze ? (ii) un parallélogramme ? (iii) un losange ? (iv) un rectangle ? (v) un carré ? Justifier.
- (b) Soit encore  $C$  un point du cercle, tel que  $|AC| < |OA|$ . La perpendiculaire à  $OC$  par  $A$  recoupe le cercle en  $C'$ . Le quadrilatère  $OACC'$  est-il (i) un trapèze ? (ii) un parallélogramme ? (iii) un losange ? (iv) un rectangle ? (v) un carré ? Justifier.
- (c) Pour quelle mesure de l'angle  $\widehat{ACC'}$  le quadrilatère  $OACC'$  a-t-il une aire de  $r^2/2$  ?

3. Justin souhaite fixer cinq documents rectangulaires (de dimensions quelconques), éventuellement superposés, partiellement ou totalement, à un tableau métallique rectangulaire en plaçant des aimants, cela de sorte que chacun des documents soit coincé entre le tableau et trois aimants au moins.

- (a) Dans le cas de la disposition suivante des cinq documents, combien d'aimants doit-il utiliser au minimum ?



- (b) Quel est le plus petit nombre d'aimants qui permettra de fixer toute configuration de cinq documents ? Donner un exemple de configuration de cinq documents qui requiert ce nombre minimal d'aimants.
- (c) Existe-t-il une configuration de cinq documents pour laquelle le plus petit nombre d'aimants requis est huit ?

4. Johan, plus âgé que Fabrice, remarque qu'en permutant les deux chiffres de son âge, il obtient celui de Fabrice. Ce dernier, quant à lui, observe que la différence entre les carrés de leurs âges est le carré d'un naturel non nul. Quels sont leurs âges respectifs ?

Une organisation de la

