



TRENTE-SEPTIÈME OLYMPIADE MATHÉMATIQUE BELGE MINI FINALE 2012

Mercredi 25 avril 2012

*Prière de répondre aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Chaque réponse doit être soigneusement justifiée !*

1. Soit

- La somme à 1 terme 1×1 ;
- La somme à 2 termes $1 \times 2 + 2 \times 1$;
- La somme à 3 termes $1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1$;
- La somme à 4 termes $1 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1$;
- La somme à 5 termes $1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 1$;
- ...

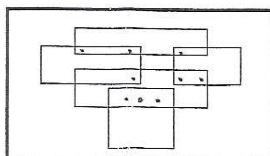
- (a) Écrire la somme à 9 termes.
- (b) La somme à 2012 termes est-elle un nombre pair ou un nombre impair ?
- (c) Pour quels naturels non nuls n la somme à n termes est-elle impaire ?

2. Soit A un point sur un cercle de centre O et de rayon r .

- (a) Soit encore B un point du cercle, tel que $|AB| = |OA|$. La perpendiculaire à OB par A recoupe le cercle en B' . Le quadrilatère $OABB'$ est-il (i) un trapèze ? (ii) un parallélogramme ? (iii) un losange ? (iv) un rectangle ? (v) un carré ? Justifier.
- (b) Soit encore C un point du cercle, tel que $|AC| < |OA|$. La perpendiculaire à OC par A recoupe le cercle en C' . Le quadrilatère $OACC'$ est-il (i) un trapèze ? (ii) un parallélogramme ? (iii) un losange ? (iv) un rectangle ? (v) un carré ? Justifier.
- (c) Pour quelle mesure de l'angle $\widehat{ACC'}$ le quadrilatère $OACC'$ a-t-il une aire de $r^2/2$?

3. Justin souhaite fixer cinq documents rectangulaires (de dimensions quelconques), éventuellement superposés, partiellement ou totalement, à un tableau métallique rectangulaire en plaçant des aimants, cela de sorte que chacun des documents soit coincé entre le tableau et trois aimants au moins.

- (a) Dans le cas de la disposition suivante des cinq documents, combien d'aimants doit-il utiliser au minimum ?



- (b) Quel est le plus petit nombre d'aimants qui permettra de fixer toute configuration de cinq documents ? Donner un exemple de configuration de cinq documents qui requiert ce nombre minimal d'aimants.
- (c) Existe-t-il une configuration de cinq documents pour laquelle le plus petit nombre d'aimants requis est huit ?

4. Johan, plus âgé que Fabrice, remarque qu'en permutant les deux chiffres de son âge, il obtient celui de Fabrice. Ce dernier, quant à lui, observe que la différence entre les carrés de leurs âges est le carré d'un naturel non nul. Quels sont leurs âges respectifs ?

Une organisation de la

